SECTIONS VIRTUAL COLLOQUIUM 2020

Exploitation de ressources non-renouvelables par un et plusieurs agents : deux interprétations paramétriques

José Daniel López-Barrientos

Facultad de Ciencias Actuariales

Universidad Anáhuac México

Paris, Mai 11, 2020

Sur l'orateur

José Daniel López-Barrientos

— BSc Sciences Actuarielles, MSc Mathématiques, PhD Mathématiques

— Chercheur chez Universidad Anáhuac México ; et Chercheur invité chez HEC, Montréal ; Université de l'État de Saint-Pétersbourg ; Institut Interafricain de Formation en Assurance et en Gestion des Entreprises, Dakar.

Facultad de Ciencias Actuariales/Universidad Anáhuac México

— Seule Faculté des Sciences Actuarielles en Amérique Latine. En train de célébrer son Cinquantième anniversaire

— Dans le top 3 des meilleures Universités en Mexique (https://www.topuniversities.com/university-rankings/world-university-rankings/2020)

Table des matières

1. Un «jeu» pour un seul joueur

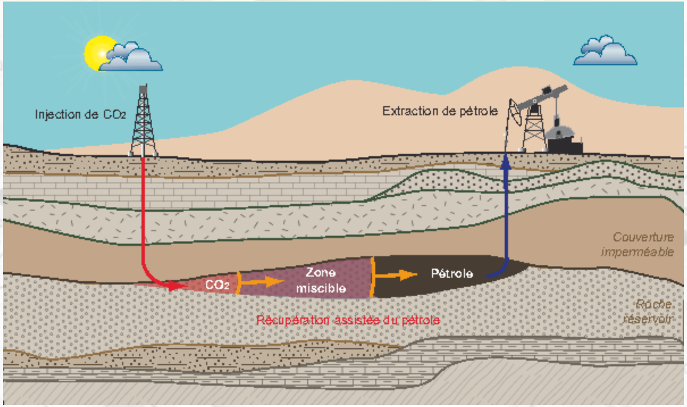


FIGURE 1 – Il n'y a qu'un extracteur autorisé

Trouver maximisateur $u^*(t, x(t))$ de

$$\max_u \left\{ \mathbb{E}\left[\int_0^T h(u(t,x(t)))\mathrm{d}t + H(x(T))\right] : \mathrm{d}x(t) = -u(t)\mathrm{d}t \right\}, \tag{1.1}$$

où

- — $x(t)$ est le niveau de la ressource au temps t ;
- — T est l'horizon (deterministe où aléatoire) du temps ;
- — u est le taux d'extraction ;
- — h est la fonction d'utilité de l'agent ;
- — H est la fonction de paiement terminal de l'agent.

Beaucoup de travaux (cf. [1,3,4]) ont étudié le problème et ont trouvé le taux optimal $u^*(t, x^*(t))$ pour plusieurs formes de la fonction d'utilité h...

Morale

Si on peut vendre assurance, il faut que la somme assurée soit

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T h(u^*(t,x^*(t)))\mathrm{d}t\right].$$

Donc, la prime de l'assurance doit être

$$u^*(t,x^*(t)) \cdot \bar{a}_t = x.$$

C'est à dire :

$$x - u^*(t,x^*(t)) \cdot \bar{a}_t = 0.$$

Démonstration. À partir du Théorème de Fubini, on peut écrire

$$\int_0^\infty h(u(t,x(t)))(1-F(t))\mathrm{d}t.$$

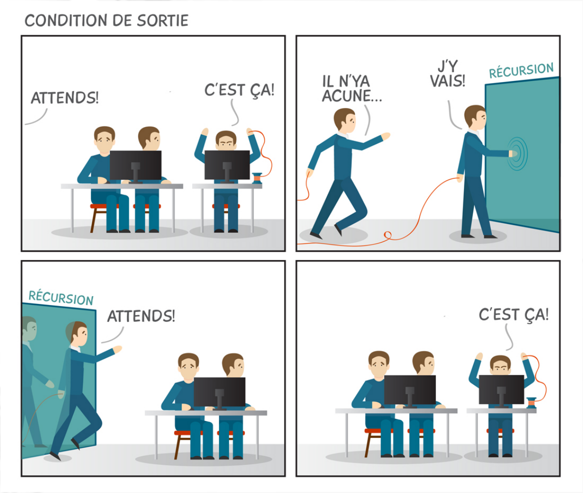
au lieu de l'ésperance dans (1.1).

En utilisant programmation dynamique, on peut écrire (1.1) comme :

$$\begin{aligned}\lambda(t)W(x,t) &= \partial_t W(x,t) + \max_u \left(h(t,u) - u\partial_x W(x,t)\right)\\ \lim_{t\to\infty} W(x,t) &= 0.\end{aligned}$$

Afin d'appliquer le résultat suivant :

Théorème 1.1. *Si* $h(x,u) = \ln u$, *alors* $u^*(t,x) = \frac{x}{\bar{a}_t}$, *où* $\bar{a}_t := \int_0^\infty \frac{1-F(t+s)}{1-F(t)}\mathrm{d}s.$



□

Remarque 1.2. *Une interprétation actuarielle du Théorème 1.1 c'est qu'on peut distinguer deux parties au contrôle optimal* $u^*(t,x)$ *:*

(i) *le* bénéfice *que l'agent obtiendra,* x *; et*

(ii) *l'*intensité de l'extraction *qu'il faut que l'agent applique,* $\bar{a}_t$.

On dira que l'utilité d'obtenir x *en extrayant* $u^*(t,x)$ *avec une intensité de* $\bar{a}_t$ *est* $h(x,u)$.

Grâce à que l'intensité de l'extraction apparaît dans le dénominateur de la définition d'$u^*(t,x)$*, on se référa à* $\frac{1}{\bar{a}_t}$ *comme l'*aisance de l'extraction.

2. Un seul joueur + «huachicoleros»

Figure 2 – Voir la tragedie en Mexique documentée sur Le Monde.

Trouver maximisateurs $u_1^*(t, x(t))$ et $u_2^*(t, x(t))$ quand :

— il y a deux (ou plus) joueurs ;

— le jeu se joue de manière simultanée ;

— le niveau de la ressource est

$$dx(t) = -(u_1 + u_2)dt, \qquad x(t_0) = x_0. \tag{2.1}$$

— l'horizon du jeu est T :

Horizon du temps	**Indice de performance**
$t \in [0, T]$; durée T	$\int_0^T h_i(u_i)dt + H_i(x(T))$
$t \in [0, \infty[$; durée infinie	$\int_0^\infty h_i(u_i)e^{-\rho t}dt$
$t \in [0, \mathbf{T}]$; durée aléatoire	$\mathbb{E}\left(\int_0^{\mathbf{T}} h_i(u_i)dt + H_i(\mathbf{x}(\mathbf{T}))\right)$
début aléatoire T_1 ;	$\int_0^\infty h_1(u_1)e^{-\rho t}dt,$ $\mathbb{E}\left[\int_{T_1}^\infty h_2(u_2)e^{-\rho t}dt\right].$

Beaucoup de travaux (cf. [2, Chapitre 10.3], [8–10]) ont étudié les premiers deux problèmes et ont trouvé les taux optimaux $u_1^*(t, x^*(t))$ et $u_2^*(t, x^*(t))$ pour plusieurs formes des fonctions d'utilité h_1 et h_2...

Morale

Si on peut vendre assurance, il faut que les sommes assurées soient

$$\int_0^T h_1(u_1^*(t, x^*(t)))\mathrm{d}t \textbf{ et } \int_0^T h_2(u_2^*(t, x^*(t)))\mathrm{d}t.$$

Donc, les primes des assurances doivent être

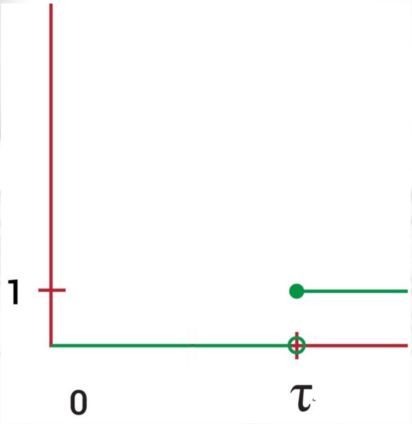
$$u_1^*(t, x^*(t)) = x/\mathbb{E}\bar{a}_{\overline{T}|} \textbf{ et } u_2^*(t, x^*(t)) = x/\mathbb{E}\bar{a}_{\overline{T}|}.$$

Remarque 2.1. *Une contrainte du modèle c'est que* (2.1) *prend en considération le puits de la ressource,* ***et non le canal*** *qui est utilisé pour la transporter...*

3. Durée et début aléatoires

Hypothèse 3.1. **(i)** *Les lois des temps de durée de l'extraction, et d'entrée des joueurs sont connues.*

(ii) *Lorsque un joueur quitte le jeu, il reçoit un versement terminal, et l'autre joueur continue à extraire.*



3.1. Durée aléatoire (cf. [6, 7])

En utilisant fonctions d'utilité et de paiement terminal logarithmiques du taux d'extraction, et du niveau de la ressource, respectivement, on a que les taux optimaux d'extraction sont :

$$u_i^*(t,x) = \frac{x}{\left(\bar{a}_{[t]_1:[t]_2} + c_i \bar{A}_{[t]_i:\overset{1}{[t]}_{-i}}\right)} \text{ pour } i = 1, 2; \tag{3.1}$$

C'est-à-dire :

$$x - u_i^*(t,x) \cdot \left(\bar{a}_{[t]_1:[t]_2} + c_i \bar{A}_{[t]_i:\overset{1}{[t]}_{-i}}\right) = 0.$$

Morale

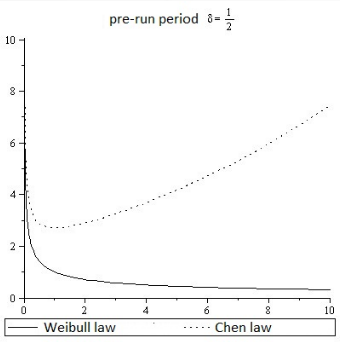
Si on peut vendre assurance, il faut que les sommes assurées soient égales à x ; et que les primes des assurances soient données par (3.1).

Les lois de Weibull et Chen

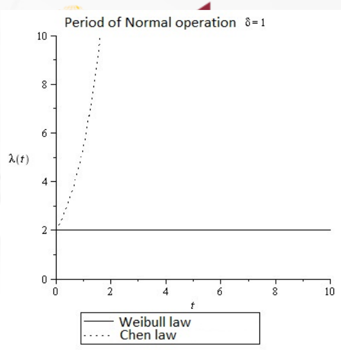
	Loi	Taux de hasard
Weibull	$F_W(t) = 1 - \exp\left(-\lambda_1 t^{\delta_1}\right)$	$\lambda_W(t) = \lambda_1 \delta_1 t^{\delta_1 - 1}$
Chen	$F_C(t) = 1 - \exp\left(\lambda_2 \left(1 - e^{t^{\delta_2}}\right)\right)$	$\lambda_C(t) = \lambda_2 \delta_2 t^{\delta_2 - 1} e^{t^{\delta_2}}$

Notez que λ_1 et λ_2 sont paramétres d'échelle, lorsque δ_1 et δ_2 sont paramétres de forme. Cas intéressants :

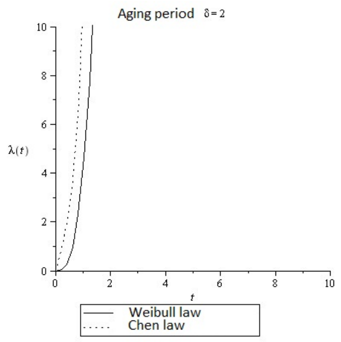
Machinerie nouvelle	Opération normale	Machinerie viellissante
$\delta < 1$	$\delta = 1$	$\delta > 1$



Taux de hasard à l'étape d'équipe nouvelle.

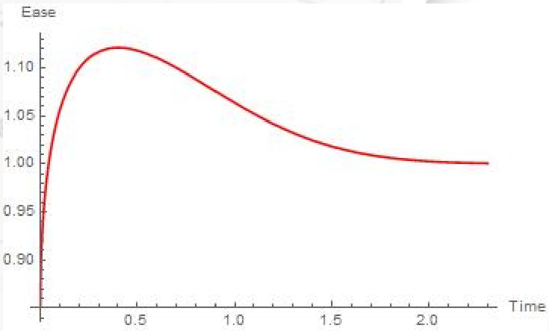


Taux de hasard à l'étape d'opération normale.

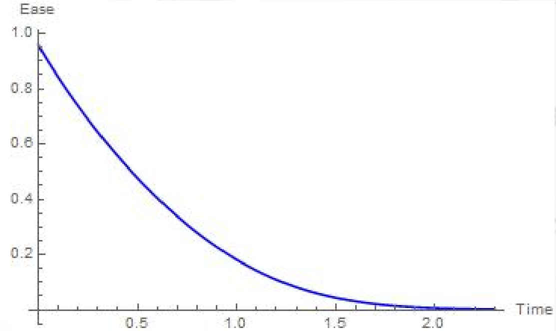


Taux de hasard à l'étape de vieillissement.

Exemple 3.2. *Si la durée de l'extraction du joueur 1 suit la loi Weibull ; et cela du joueur 2 suit la loi de Chen, les* aisances des extractions *sont comme celles ci-dessous. lorsque la machinerie du joueur 1 est nouvelle, et celà du joueur 2 est ancienne.*



(a) Aisance de l'extraction pour le joueur Weibull quand $\delta_1 = \frac{1}{2}$.



(b) Aisance de l'extraction pour le joueur Chen quand $\delta_2 = 2$.

Comparaison des valeurs pour $x = 5$, $t = 0$ *:*

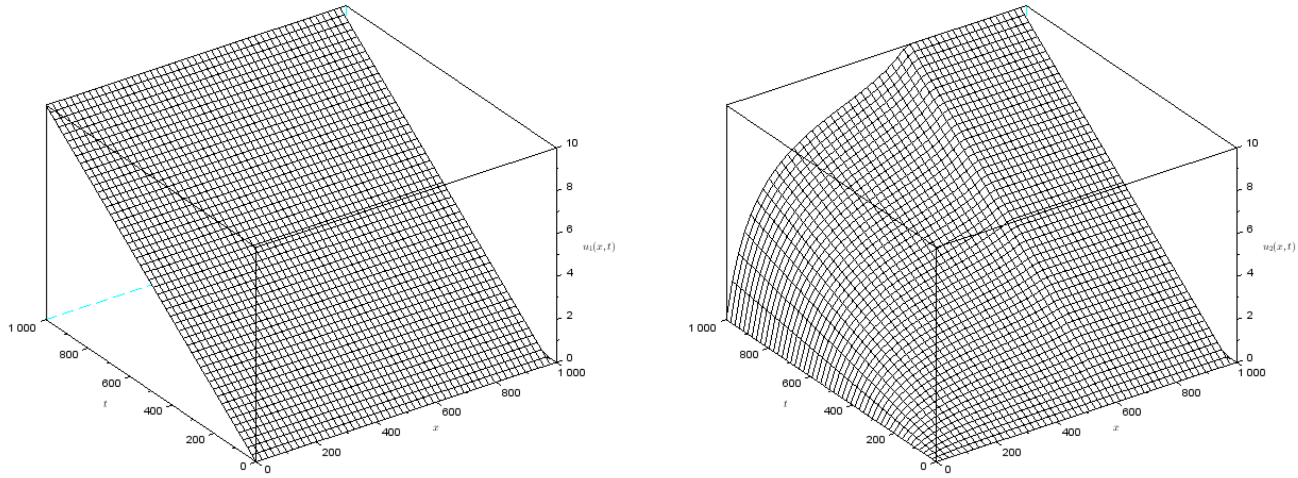
Weibull/Chen	$\delta_2 = \frac{1}{2}$	$\delta_2 = 1$	$\delta_2 = 2$
$\delta_1 = \frac{1}{2}$	$(2.3257, 1.4487)$	$(2.4326, 1.6731)$	$(2.5882, 1.9514)$
$\delta_1 = 1$	$(2.5265, 1.4734)$	$(2.6221, 1.8187)$	$(2.7908, 2.2097)$
$\delta_1 = 2$	$(2.6941, 1.5161)$	$(2.9190, 1.9226)$	$(3.0567, 2.4373)$

En tous les cas, le joueur Chen gagne moins que le joueur Weibull.

3.2. Début aléatoire (cf. [5])

Théorème 3.3. *Supposez que les fonctions d'utilité du taux d'extraction sont logarithmiques, que la loi du temps d'entrée du joueur 2 est uniforme, et qu'on utilise l'indice de performance du paiement escomté avec force d'intérêt $\rho > 0$ dans un horizon infini. Alors les taux optimaux d'extraction sont*

$$
\begin{aligned}
u_1(x,t) &= \frac{x}{1/\rho} = \frac{x}{\bar{a}_{\overline{\infty}|}}, \\
u_2(x,t) &= \begin{cases} \frac{\rho^2 xt}{\rho t + 1 - \mathrm{e}^{-\rho(\omega - t)}} = \frac{x}{\frac{\frac{t}{w-t}+\bar{a}_t}{\rho^2\omega-\rho}}, & \text{si } t \leq \omega, \\ \frac{x}{1/\rho} = \frac{x}{\bar{a}_{\overline{\infty}|}} & \text{si } t > \omega. \end{cases}
\end{aligned}
$$



Comparaison entre les taux d'extration des joueurs 1 et 2.

Morale

Si on peut vendre assurance, il faut que les sommes assurées soient égales à x ; et que les primes des assurances soient données par des rentes certaine (pour le joueur 1) et contingente (pour le joueur 2).

4. Conclusions

Il n'y a qu'un agent autorisé

Des autres agents peuvent extraire la ressource

Temps d'entrée et de sortie des agents sont aléatoires

Il y a une balance actuarielle entre le bénéfice éventuel, et le taux optimal d'extraction (principe d'équivalence)

Nous considerons le puits, mais il faut considerer les canaux...

Références

[1] Dasgupta, P., and Stiglitz, J. Resource Depletion Under Technological Uncertainty. *Econometrica 49* (1981), 85–104.

[2] Dockner, E., Jørgensen, S., van Long, N., and Sorger, G. *Differential Games in Economics and Management Science*. Cambridge University Press, 2000.

[3] Epstein, G. The extraction of natural resources from two sites under uncertainty. *Econ. Lett. 51* (1996), 309–313.

[4] Feliz, R. The optimal extraction rate of a natural resource under uncertainty. *Econ. Lett. 43* (1993), 231–234.

[5] Gromova, E., and López-Barrientos, J. A Differential Game Model for The Extraction of Nonrenewable Resources with Random Initial Times–The Cooperative and Competitive Cases. *Int. Game Theory Rev. 18(2)* (2016).

[6] Kostyunin, S., Palestini, A., and Shevkoplyas, E. On a nonrenewable resource extraction game played by asymmetric firms. *J. Optim. Theory Appl. 163* (2014), 660–673.

[7] López-Barrientos, J., Gromova, E., and Miroshnichenko, E. Resource exploitation under two parametric interpretations, 2019.

[8] Marin-Solano, J., and Shevkoplyas, E. Non-constant discounting and differential games with random time horizon. *Automatica 47*, 12 (2011), 2626–2638.

[9] Petrosyan, L., and Shevkoplyas (Gromova), E. Cooperative solutions for games with random duration. *Game Theory and Applications IX* (2003), 125–139.

[10] Reinganum, J., and Stokey, N. Oligopoly extraction of a common property resource : The importance of the period of commitment in dynamic games. *Int. Econ. Rev. 26* (1985), 161–173.

Merci pour votre attention !

Coordonées de contact : Facultad de Ciencias Actuariales

Universidad Anáhuac México

Av. Universidad Anáhuac 46, Lomas Anáhuac, 52786 Naucalpan de Juárez, México.

Tél. 01-52-55-56-27-0210 ext. 8506

daniel.lopez@anahuac.mx

https://www.actuarialcolloquium2020.com/

Disclaimer

SECTIONS VIRTUAL COLLOQUIUM 2020