

CONCURSO DE MATEMÁTICAS  
"A. N. KOLMOGOROV"

1. La forma totalmente factorizada de  $(x^2-1)(x^2 - 3x + 2)$

- A)  $(x - 1)^2(x + 1)(x - 2)$       B)  $(x^2 + 1)^2(x - 2)$       C)  $(x - 1)(x + 1)^2(x - 2)$   
D)  $(x - 1)(x + 1)(x - 2)$       E)  $(x^2 - 1)(x + 1)(x - 2)$

2. La expresión numérica  $\frac{\frac{2}{5}-3}{1-\frac{3}{2}}$  es igual a:

- A)  $-\frac{5}{13}$       B)  $-\frac{26}{5}$       C)  $\frac{13}{5}$       D)  $\frac{26}{5}$       E)  $-\frac{13}{5}$

3. Después de racionalizar el denominador de  $\frac{8}{\sqrt{5}-1}$  se obtiene:

- A)  $8(\sqrt{5}-1)$       B)  $2(\sqrt{5}-1)$       C)  $2(\sqrt{5}+1)$       D)  $2\sqrt{5}-1$       E)  $8(\sqrt{5}+1)$

4. Suponga que  $a, b > 0$ . La expresión algebraica  $\left(\frac{1}{a}+b\right)^{-1}$  es igual a:

- A)  $\frac{a}{1+ab}$       B)  $\frac{a}{1-ab}$       C)  $\frac{1-ab}{a}$       D)  $\frac{a}{b-a}$       E)  $\frac{ab}{b-1}$

5. ¿Cuál es la suma de los radicales siguientes?

$$\sqrt{12}, \sqrt{24}, \sqrt{27}, \sqrt{75}$$

- A)  $10\sqrt{3}$       B)  $10\sqrt{3}+2\sqrt{6}$       C)  $9\sqrt{3}+2\sqrt{6}$       D)  $10\sqrt{6}+2\sqrt{3}$       E)  $10\sqrt{3}+6\sqrt{2}$

6. El número total de sextos en  $3\frac{2}{4}$  es:

- A) 14      B) 15      C) 18      D) 20      E) 21

7. Pedro vio una oferta en *Deportes Marín* en la que se ofrecía zapatos con descuento del 10% y al pagar en caja le dijeron que tenía otro 20% sobre el precio ya rebajado. Si Pedro pagó \$720 por sus zapatos de fútbol. ¿Cuál era el precio original de éstos?

- A) \$1,028.<sup>55</sup>      B) \$1,000.<sup>00</sup>      C) \$750.<sup>00</sup>      D) \$1020.<sup>00</sup>      E) \$1080.<sup>00</sup>

8. Simplifique la siguiente fracción compleja, suponga que en el proceso nunca se divide entre cero.

$$\frac{1}{1-\frac{1}{1+\frac{1}{x}}} =$$

- A)  $x+1$       B)  $\frac{x+1}{x-1}$       C)  $\frac{x+1}{1-x}$       D)  $\frac{1}{x+1}$       E)  $\frac{x-1}{x+1}$

9. Olivia obtuvo 8, 7, 7 en su tres exámenes parciales. ¿Cuál debe ser la calificación en su examen final, si quiere sacar 8 de promedio final? El examen final cuenta el doble que cada uno de los parciales.

- A) 8                      B) 8.5                      C) 9                      D) 9.5                      E) 10

10. Si a un cilindro se le duplica la longitud de su radio y su altura se divide entre dos, entonces su volumen se multiplica por:

- A) 2                      B)  $\pi$                       C) 4                      D) 6                      E)  $2\pi$

11. ¿Cuál de las siguientes es una ecuación de la recta que pasa por el punto (-3, -2) y es paralela al eje X?

- A)  $x + 3 = 0$                       B)  $y - 3 = 0$                       C)  $x - 3 = 0$                       D)  $y + 3 = 0$                       E)  $y + 2 = 0$

12. Un punto se mueve de tal manera que su distancia al punto A(1,1) siempre es la misma que su distancia al punto B(2,0). Una ecuación del lugar geométrico que describe este punto es:

- A)  $2x - y = 2$                       B)  $x + y = 2$                       C)  $y = x^2$                       D)  $-x + 2y = 1$                       E)  $x - y = 1$

13. ¿Cuál es la pendiente de la recta que pasa por los centros de las circunferencias:

- $x^2 + y^2 + 6x + 8 = 0$                       y                       $x^2 + y^2 - 8y + 15 = 0$ ?
- A) -3                      B)  $-\frac{4}{3}$                       C)  $\frac{3}{4}$                       D)  $-\frac{3}{4}$                       E)  $\frac{4}{3}$

14. Una ecuación de la recta que es tangente a la circunferencia

- $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 25$  en el punto (6, 0) es:
- A)  $4x + 3y = 24$                       B)  $4x - 3y = 24$                       C)  $3x - 4y = 24$                       D)  $3x - 4y = 18$                       E)  $3x + 4y = 18$

15. ¿Cuál es el área, en unidades cuadradas, del triángulo cuyos vértices son A(-1, 0), B(3, 0) y C(2, 10)?

- A) 6                      B) 9                      C) 10                      D) 12                      E) 20

16. Calcule la distancia que existe entre los focos de la elipse  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$

- A) 6                      B) 7                      C) 14                      D) 16                      E) 32

17. El foco y una ecuación de la directriz de la parábola  $-2x^2 = y$  son:

- A)  $(-\frac{1}{8}, 0), x = \frac{1}{8}$                       B)  $(0, -\frac{1}{8}), y = \frac{1}{8}$                       C)  $(-2, 0), y = 2$                       D)  $(0, 2), y = -2$                       E)  $(\frac{1}{8}, 0), x = \frac{1}{8}$

18. La gráfica de la ecuación  $-3x^2 - 3y^2 - 6x + 12y - 15 = 0$  es:

- A) Una elipse con eje mayor horizontal                      B) Una elipse con eje mayor vertical                      C) Una elipse con focos en el eje X                      D) Una circunferencia de radio 5                      E) Representa un punto.

19. Si uno de los extremos de un segmento de recta tiene coordenadas (5,1) y las coordenadas de su punto medio son (2,2), ¿cuál es la suma de las coordenadas del otro extremo?

- A) 2                      B) 4                      C) 3                      D) -2                      E) -3

20. Si la distancia del punto  $P(x, y)$  a la recta horizontal  $y = -4$ , es igual a la distancia de  $P$  al punto  $(3, 0)$ , entonces las coordenadas del punto  $P$  están en una:

- A) Recta      B) Circunferencia      C) Elipse      D) Parábola      E) Hipérbola

21. En un círculo de radio  $6 \text{ cm}$ , ¿cuál es la medida (en grados) de un arco cuya longitud es  $2\pi \text{ cm}$ ?

- A)  $30^\circ$       B)  $60^\circ$       C)  $90^\circ$       D)  $180^\circ$       E)  $360^\circ$

22. ¿Cuál es el valor de la expresión siguiente  $\sec(45^\circ)\sen(45^\circ)$ ?

- A)  $-\infty$       B)  $-1$       C)  $0$       D)  $+1$       E)  $+\infty$

23. Si sabe que  $\cos A < 0$  y  $\tan A = \frac{3}{4}$ , entonces el valor de  $\sen A$  es:

- A)  $-\frac{4}{3}$       B)  $-\frac{4}{5}$       C)  $\frac{3}{5}$       D)  $-\frac{3}{5}$       E)  $\frac{4}{5}$

24. Un guardabosques se encuentra en una torre a  $50$  metros sobre el nivel del suelo. Descubre un incendio a un ángulo de depresión de  $6^\circ$ . ¿A qué distancia, en metros, se encuentra el incendio del pie de la torre del guardabosques?

$\sen 6^\circ \approx 0.10$        $\cos 6^\circ \approx 0.99$        $\tan 6^\circ \approx 0.11$

- A)  $500$       B)  $50.505$       C)  $454.545$       D)  $400$       E)  $60.60$

25. El valor de  $\cos(300^\circ)$  es:

- A)  $\frac{1}{2}$       B)  $-\frac{1}{2}$       C)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$       D)  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$       E)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

26. El valor exacto de  $\cos(75^\circ)$  es:

- A)  $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$       B)  $\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$       C)  $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right)$       D)  $\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$       E)  $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

27. Considere el triángulo  $ABC$ , en donde el lado  $AB$  mide  $5 \text{ cm}$ , el lado  $BC$  mide  $7 \text{ cm}$  y el lado  $AC$  mide  $4 \text{ cm}$ , entonces  $\cos A$  es igual a:

- A)  $\frac{4}{5}$       B)  $-\frac{5}{7}$       C)  $-\frac{1}{5}$       D)  $\frac{5}{7}$       E)  $\frac{4}{7}$

28. Considere un triángulo isósceles, con ángulos en la base de  $30^\circ$  cada uno, y dos lados de  $10 \text{ cm}$ . ¿Cuántos centímetros mide la base?

- A)  $5$       B)  $2(10)\sqrt{3}$       C)  $10\sqrt{3}$       D)  $4(10)\sqrt{3}$       E)  $5\sqrt{3}$

29. A las diez en punto las manecillas del reloj forman un ángulo, en radianes, de:

- A)  $\frac{1}{6}$       B)  $\frac{1}{3}$       C)  $\frac{p}{6}$       D)  $\frac{p}{12}$       E)  $\frac{p}{3}$

30. La expresión  $\sen\left(\frac{3p}{2} + q\right)$  es igual a:

- A)  $-\cos q$       B)  $\cos q$       C)  $-\sen q$       D)  $\sen q$       E)  $\cos(-q)$

31. Si  $F$  es una función tal que  $F(0) = 2$ ,  $F(1) = 3$  y  $F(m + 2) = 2F(m) - F(m+1)$ , entonces  $F(5)$  es igual a:

- A) 3                      B) 5                      C) 7                      D) 11                      E) 13

32. Determine el valor del límite siguiente,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+h} - \sqrt{2}}{h}.$$

- A) 0                      B)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$                       C)  $\frac{\sqrt{2}}{4}$                       D)  $\infty$                       E) el valor está indefinido

33. Si la parábola  $y = k - x^2$  es tangente a  $y = x$ , entonces  $k$  es igual a:

- A)  $-\frac{3}{4}$                       B)  $-\frac{1}{4}$                       C) 0                      D)  $\frac{1}{4}$                       E)  $\frac{3}{4}$

34. Sea  $f(x)$  una función con segunda derivada continua en  $x = 4$ . Sea  $f(4) = 2$ ,  $f'(4) = -3$  y  $f''(4) = 5$ . Si  $g(x) = x^2 f(x)$ . Calcule  $g''(4)$ .

- A) -32                      B) 4                      C) 36                      D) 60                      E) 80

35. De un globo esférico escapa aire a razón de  $10 \text{ cm}^3$  por minuto. En el instante en que el radio es de  $5 \text{ cm}$ , ¿qué tan rápido se reduce el radio por minuto? Suponga que en todo momento el globo conserva forma esférica.

- A)  $\frac{-1}{100p} \text{ cm/min}$     B)  $\frac{-1}{100} \text{ cm/min}$     C)  $\frac{-1}{50p} \text{ cm/min}$     D)  $\frac{-1}{10p} \text{ cm/min}$     E)  $\frac{-1}{10} \text{ cm/min}$

36. Un cuadrado tiene área de  $25 \text{ cm}^2$ . Si se construye otro cuadrado con lado igual a la longitud de la diagonal del primero, ¿cuánto vale el área del segundo cuadrado?

- A)  $100 \text{ cm}^2$                       B)  $2\sqrt{25} \text{ cm}^2$                       C)  $2\sqrt{50} \text{ cm}^2$                       D)  $50 \text{ cm}^2$                       E)  $5\sqrt{50} \text{ cm}^2$

37. ¿Cuántas soluciones reales y diferentes tiene la ecuación  $\sqrt{x^4 + 1} + 1 = 0$ ?

- A) 0                      B) 1                      C) 2                      D) 3                      E) 4

38. Una expresión equivalente a  $\sqrt{\sqrt{\sqrt{m^6}}}$  es:

- A)  $m$                       B)  $\sqrt{m}$                       C)  $m^2$                       D)  $\sqrt[3]{m^4}$                       E)  $\sqrt[4]{m^3}$

39. ¿Cuál es el producto de dos números consecutivos, si la diferencia de sus cuadrados es 9?

- A) 400                      B) 90                      C) 56                      D) 42                      E) 20

40. Se invirtió un millón de pesos en dos tipos de proyectos (A y B). Al final de un año el proyecto A generó 5% de interés, mientras que el proyecto B dio 12%. Si las ganancias totales obtenidas fueron \$106,000, ¿cuánto se invirtió más en B que en A?

- A) \$700,000    B) \$600,000    C) \$500,000    D) \$200,000    E) \$0

41. Una hoja metálica en forma rectangular, tiene una longitud que es cuatro centímetros más que el doble del ancho. De cada esquina se corta una pieza cuadrada de  $2 \text{ cm}$  por lado. Después las orillas se doblan hacia arriba para formar una caja sin tapa, cuyo volumen es de  $240 \text{ cm}^3$ . El ancho, en  $\text{cm}$ , de la hoja metálica es:

- A) 16                      B) 14                      C) 12                      D) 10                      E) 8

42. El buque encallado frente a las islas Galápagos derrama petróleo y el radio de la mancha de petróleo crece a velocidad constante de 2 metros/minuto. Después de una hora, ¿cuál es el área que cubre la mancha (en metros cuadrados)? Suponga que la mancha siempre es circular.

- A)  $1,200\pi$       B)  $14,400\pi$       C) 1200      D) 14,400      E) 1,440

43. Si  $p$  representa a un entero par positivo, entonces la expresión *la suma de tres enteros pares consecutivos*, en lenguaje algebraico se puede escribir:

- A)  $3p+1$       B)  $p+p+1+p+2$       C)  $3p+3(1)$       D)  $3p+9$       E)  $3p+6$

44. ¿Cuál es el valor de  $\log_9\left(\frac{1}{3}\right)$ ?

- A) -2      B) 2      C)  $-\frac{1}{2}$       D)  $\frac{1}{2}$       E)  $-\frac{1}{3}$

45. Una ventana en forma rectangular, coronada por un semicírculo de radio  $r$  metros, es tal que el área del rectángulo es igual al área del semicírculo, ¿cuánto mide, en metros, la altura de la ventana? (Desde la base del rectángulo, hasta el punto más alto del semicírculo).

- A)  $\frac{p+r}{4}$       B)  $r\left(\frac{p+1}{4}\right)$       C)  $r\left(\frac{p+4}{4}\right)$       D)  $r\left(\frac{p+2}{4}\right)$       E)  $r\left(\frac{p-1}{4}\right)$

46. El valor que hace verdadera la ecuación  $\frac{6^{-3}}{6^x} = 6^4$  es:

- A) 1      B) 7      C) -7      D) -1      E)  $\frac{4}{3}$

47. Si  $a = \sqrt[6]{8}$ ,  $b = \sqrt[3]{4}$ ,  $c = \sqrt[6]{25}$ , entonces el orden correcto de mayor a menor de los números es:

- A)  $a, b, c$       B)  $b, a, c$       C)  $c, a, b$       D)  $c, b, a$       E)  $b, c, a$

48. Un reloj tiene dos engranes, uno con 60 dientes, que da una vuelta en 30 segundos, el otro engrane tiene 18 dientes. El primer engrane hace girar al segundo. En 15 minutos, ¿cuántas vueltas da el segundo engrane?

- A) 30      B) 60      C) 100      D) 120      E) 150

49. La diagonal mayor de un cubo, mide 1 metro, ¿cuánto mide cada uno de sus lados (aristas)?

- A)  $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}m$       B)  $\frac{1}{\sqrt{3}}m$       C)  $\frac{3}{\sqrt{2}}m$       D)  $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}m$       E)  $\frac{2}{\sqrt{3}}m$

50. Un depósito, alimentado por 3 llaves, puede llenarse en 12 minutos por la primera llave, en 15 minutos por la segunda y en 20 minutos por la tercera. ¿Cuánto tiempo (minutos) necesitarán las tres llaves juntas para llenarlo?

- A) 3      B) 5      C) 6      D) 6.5      E) 8