ÁLGEBRA

Problemas Resueltos

1. Para reunir dinero, Salvador realizó una marcha contra la pobreza. Por cada kilómetro recorrido reunió \$500.°°. Él recorrió una parte a 5 km/h y el resto a 8 km/h, con lo que reunió \$36,000.°°. Dijo que, por desgracia no tuvo la energía necesaria para invertir las velocidades, es decir, recorrer a 8 km/h lo que caminó a 5 km/h y viceversa. Pues si lo hubiese hecho así, entonces la cantidad recolectada sería \$42,000.°°. ¿Cuánto tiempo en total duró su marcha? ¿Y cuál fue la distancia que recorrió en total?

2. A una pequeña empresa le cuesta \$100.°° producir un pantalón. Además tiene \$360.°° diarios de costos fijos de diversos tipos. Cada pantalón lo vende a \$160.°°.
   a) Calcule el costo total de producir *p* pantalones.
   b) Calcule el ingreso total, si la empresa vende *p* pantalones.
   c) ¿Cuál es el número de pantalones que hace que el costo y los ingresos sean iguales?

3. En la competencia de nado contracorriente del río "Las Estacas", en un sentido, Luis hace el recorrido en 20 minutos y de regreso a contracorriente en 30 minutos. Si la velocidad del río es de $\frac{1}{2}$ km/h.
   a) ¿Cuál es la distancia que recorre Luis en un solo sentido?
   b) En aguas tranquilas, ¿cuál sería la velocidad de nado de Luis?

4. Si sabe que $log_x\ 2 = A$ y $log_x\ 3 = B$, ¿cuál es el valor de $log_x\left(\sqrt[4]{1.5x^3}\right)$? Exprese su respuesta en términos de *A* y *B*.

5. ¿Cuál es el valor de la expresión $(2x)^{-2/3} + (-8x)^{-2/5}$, en $x = 4$.

6. Encuentre todos los valores reales de *x* que satisfagan la ecuación: $5 + \sqrt{x-7} = x - 8$.

7. Celia va a enviar por correo un cromo de forma rectangular que mide 6×10 cm, para eso le colocará un borde decorativo de ancho uniforme. Al agregarle el borde el área aumenta 80 cm^2. ¿Cuál es el ancho del borde que Celia hizo?

8. Enrique y Patrick en su última aventura realizaron un viaje de la ciudad A a la ciudad B, de ida lo hicieron a un promedio de 150 km/h. Pero de regreso, su velocidad promedio fue de 100 km/h. ¿Cuál fue la velocidad promedio en el viaje redondo?

9. Si $x \neq 7$ y $g(x) = (x-2)^2$, encuentre una expresión equivalente a $\dfrac{g(x)-g(7)}{x-7}$.

10. ¿Cuál es el menor entero positivo que si se multiplica por 84 el resultado es un cuadrado perfecto?

ÁLGEBRA

Problemas propuestos

1. Si n personas hacen un trabajo en d días, entonces ¿en cuánto tiempo realizarán el mismo trabajo $n + m$ personas?

2. Resuelva la ecuación $\dfrac{\log\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{\log\left(\sqrt[3]{x-40}\right)} = 3$.

3. Claudia puede distribuir 200 invitaciones en 3 horas, si le ayuda Luis lo puede hacer en 2 horas y media. ¿Cuánto tiempo se tardará Luis en distribuir las 200 invitaciones él solo?

4. Un matrimonio tiene 7 hijos, 2 mujeres y 5 varones. La mayor de todos, Ana Laura, notó que este año el promedio de las edades de los varones es de 38 años y el de los siete hermanos 40. Además, ella es 4 años mayor que María Teresa. ¿Qué edad tiene cada una de las hermanas?

5. ¿Cuál es el menor entero positivo que debe sumarse a 1001 para que la suma sea divisible entre 47?

ÁLGEBRA

Problemas de práctica

1. El gobierno cobra 4% de impuesto sobre el interés que recibe un inversionista. Si una persona invierte 5 millones de pesos al 8% durante cierto tiempo, ¿cuánto pagará de impuestos?

2. Los números 3, 5 y 7 forma una terna de números impares consecutivos que son primos. ¿Existe otra terna con esa característica?, es decir, ¿existe otra terna de impares consecutivos que todos sean primos?

3. Dos automóviles parten en el mismo momento de un mismo punto y en igual dirección. La velocidad del primer automóvil es 50 km/h mientras que la del segundo 40 km/h. Media hora después, del punto de partida original y en la misma dirección, sale un tercer automóvil que alcanza al primero 1.5 horas más tarde que al segundo. ¿Cuál es la velocidad del tercer automóvil?

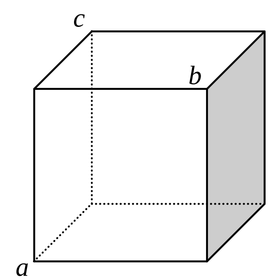
4. Bárbara y Marimar depositaron en una caja de ahorros, iguales cantidades. Bárbara retiró su depósito al cabo de m meses y recibió $\$p$. Marimar, al retirar su depósito, después de n meses recibió $\$q$. ¿Cuánto dinero depósito cada una y qué porcentaje paga la caja de ahorros?

5. A Cenicienta su hada madrina le dijo que le concedería un deseo, a lo cual Cenicienta respondió: “Concédeme no cumplir más años y quedarme con los que tengo actualmente, ya que me parecería muy triste envejecer como Brunilda, la mayor de mis hermanastras que me lleva 8 años”. Su hada madrina le concedió el deseo de la eterna juventud. Al enterarse de lo anterior, las dos hermanastras de Cenicienta se enfadaron mucho. Además Griselda, que era hábil en matemáticas, le dijo a Brunilda que en los siguientes dos años perderían $1,382.°°, pues su padre en el testamento estipulaba que cada año recibirían un cheque con una cantidad igual al producto de sus tres edades. Tal cantidad, por supuesto, sólo la repartían entre ellas dos. ¿Cuál es la edad de Cenicienta?

TRIGONOMETRÍA

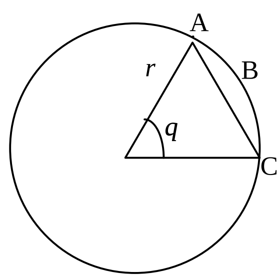
Problemas Resueltos

1. La figura muestra un cubo, ¿cuál es la medida del ángulo $\angle cab$?



2. En un pastizal se encuentra una plataforma de forma triangular de 8 m por lado. Atada a una esquina de ella está una cabra. La longitud de la cuerda con que está atada la cabra es de 14 m. Si la cabra y la cuerda no pueden pasar por encima de la plataforma, calcule el área de pastizal que puede abarcar la cabra

3. Calcule el área del sector circular *ABC* de la figura siguiente. Exprésela en términos de *r* y *q*.



4. Sin utilizar calculadora, obtenga el valor exacto de:

   a) $\dfrac{\tan(35°)}{\cot(55°)}$

   b) $sen(15°)$

5. El triángulo *ABC* es un triángulo rectángulo isósceles, cuya hipotenusa *AB* mide 4 cm. *CD* es un arco de circunferencia, de radio *AC* y centro en *A.* Determine la razón de las áreas en que el arco divide al triángulo.

6. Determine *sen q*, si *cos q* = $\frac{5}{13}$ y $-\frac{p}{2} < q < 0$

7. Encuentre todos los números reales que satisfagan la ecuación: $e^{\cos(q)} = 1$.

8. Una unidad astronómica (UA) es igual a la distancia promedio entre el Sol y la Tierra. Mientras que un parsec es igual a la distancia a la cual 1 UA subtiende un arco de 1 segundo.
   a) ¿Cuánto mide un parsec en unidades astronómicas?
   b) ¿Cuánto mide un parsec en kilómetros?

9. En radianes, ¿cuánto mide el ángulo que forman el horario y el minutero de un reloj?
   a) A las 3:00 en punto.
   b) A las 11:40.

10. En una pizzería se venden las pizzas en rebanadas. La rebanada chica es un sexto de una pizza circular de 30 cm de diámetro y se vende en $25.°°. La grande es un octavo de una pizza circular de 50 cm de diámetro y se vende en $50.°°. ¿Cuál rebanada da más pizza por peso?

TRIGONOMETRÍA

Problemas propuestos

1. Se tiene un polígono regular inscrito en un círculo de radio *r* cm, si cada lado del polígono mide 2*a* cm, ¿cuántos lados tiene el polígono? (Escriba su respuesta en términos de *r* y *a*).

2. ¿Cuántos valores de $\theta \in (-\pi, \pi)$, satisfacen *sen* $5\theta = \frac{1}{2}$.

3. En una ferretería, enrollado en una espiral circular, se tiene almacenado el tubo flexible de cobre, para las instalaciones de gas. El diámetro de las circunferencias que se forman es de 40 cm. Pablo y Ricardo van a comprar 4.00 *m* de este tubo. El dependiente sin

desenrollar el tubo utilizando un transportador y una regla rígida, mide y se los entrega. ¿Cuántas “vueltas” de tubo les entregó el dependiente? Aproximado al décimo de vuelta más cercano.

4. Si *sen*(k + θ) = *cos* θ, para toda θ ∈ $\Re$.
   a) ¿Cuál es el valor de k?
   b) ¿Es único el valor de k?

5. Un círculo de radio 20 cm está inscrito en un hexágono regular. Calcule el perímetro del hexágono.

TRIGONOMETRÍA

Problemas de práctica

1. Una persona se encuentra a cierta distancia del pie de un edificio. Levanta la vista y observa el punto más alto del edificio, el ángulo de la visual es 30º. Después avanza 20 *m* en línea recta hacia el edificio, y vuelve a observar el punto más alto, esta vez el ángulo de la visual es de 60°. Si los ojos del observador están a 1.60 *m* del piso, aproxime la altura del edificio.

2. Un reloj de manecillas, entre las 2:45 y 3:35, ¿cuántas veces las manecillas forman un ángulo recto?

3. Obtenga el valor de *sec* θ, si sabe que *csc* θ = $\frac{5}{4}$ y $\frac{p}{2} \le q < p$.

4. Dos estaciones de guardabosques están separadas 5 km en línea recta. Dos guardabosques, uno en cada estación, observan humo de un incendio. Los ángulos de observación al incendio son 20° y 60°, el ángulo se mide con respecto a la recta que pasa por las estaciones. Aproximadamente a qué distancia de cada guardabosques se encuentra el incendio.

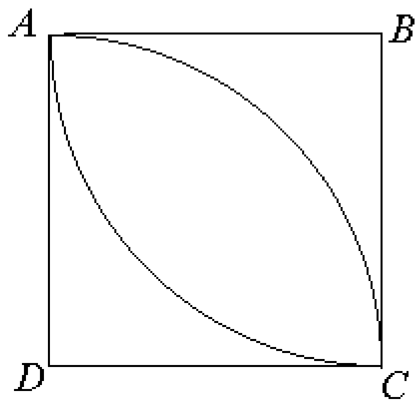
5. ¿Cuántos valores de θ ∈ (0, 2π) satisfacen la ecuación

$$(sec^2\ \theta)\ (sen\ \theta) = 1$$

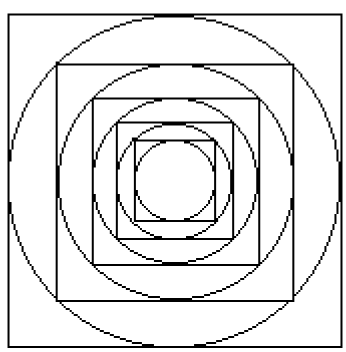
GEOMETRÍA

Problemas Resueltos

1. Sean *A*, *B*, *C* y *D* los vértices de un cuadrado de área 1, como el que se muestra en la figura. Suponga que se trazan dos arcos de radio unitario, uno con centro en *B* y el otro en *D*, de modo que ambos pasan por los puntos *A* y *C*. ¿Cuánto mide la superficie encerrado por ambos arcos?



2. Un alambre de 1 metro de longitud, se parte en dos trozos de diferente tamaño, y con cada trozo se forma un triángulo equilátero. Si el área cubierta por el triángulo más pequeño es un noveno del área cubierta por el triángulo más grande, ¿cuál es la longitud de cada trozo de alambre?
3. ¿Cuál es el área de cualquier triángulo equilátero inscrito dentro de una circunferencia de área *x*?
4. Un triángulo rectángulo tiene una hipotenusa de 5 unidades de longitud y su perímetro es de 12 unidades. ¿Cuál es el área del triángulo?
5. Si el cuadrado más grande de la figura siguiente cubre una superficie de tamaño *x*, ¿cuál es el área del círculo más pequeño?



6. Los puntos medios de los lados de un triángulo son los puntos (2, 5), (4, 2) y (1, 1). ¿Cuáles son las coordenadas de sus vértices?

7. Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos equidistantes a lo puntos fijos (0, 5) y (5, 0).

8. Los puntos $\left(\frac{2}{3},1\right)$ y $\left(\frac{10}{3},-1\right)$ son los puntos de trisección del segmento de recta que une a los puntos *A* y *B*. ¿Cuáles son las coordenadas de los extremos *A* y *B*?

9. Los puntos $A = (0, 0)$ y $B = (1, 0)$ son los extremos de la base de un triángulo. Hallar la ecuación del lugar geométrico del punto (X, Y), si éste se mueve de modo tal que el triángulo que forma con *A* y *B* es un triángulo rectángulo en el que el segmento *AB* es la hipotenusa. Además identifique el tipo de cónica que representa.

GEOMETRÍA

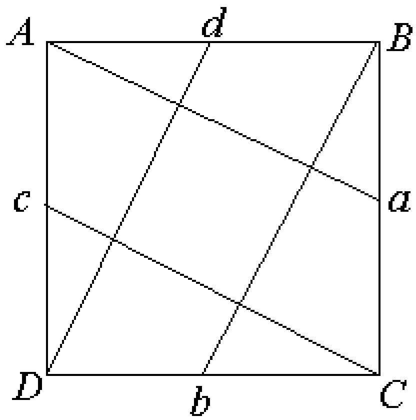
Problemas propuestos

1. Una escalera de 4 metros de longitud está recargada en la pared y tiene colgada una cubeta de pintura justo en su punto medio. En un determinado momento, la escalera comienza a resbalar hasta quedar tendida completamente sobre el piso. ¿Cuál es una ecuación del lugar geométrico de la trayectoria de la cubeta? (*Sugerencia*: Considere como origen la intersección de la pared con el piso).

2. Un hexágono regular está inscrito en una circunferencia que a su vez está inscrita en un triángulo equilátero. Si el área del triángulo es *x*, ¿cuál es el área del hexágono?

3. Una recta pasa por el punto (-6, 7) y forma con los ejes coordenados un triángulo cuya área es de 10.5 unidades cuadradas. ¿Cuál puede ser la pendiente de esta recta?

4. Se tiene un cuadrado de área = 1. Desde cada uno de sus vértices se traza un segmento de recta que va del vértice hasta el punto medio del lado opuesto al vértice (t~ como se muestra en la figura siguiente). ¿Cuál es el área del cuadrado interno que se forma por los segmentos de recta?



GEOMETRÍA

Problemas de práctica

1. Sean *R, S* y *T* los vértices de un triángulo equilátero cuya área es de $\frac{\sqrt{3}}{4}$ unidades cuadradas. Suponga que con centro en *R*, se traza un arco de circunferencia que une los vértices *S* y *T*; que con centro en *S*, se traza un arco de circunferencia que une los vértices *R* y *T* y que finalmente, con centro en *T*, se traza un arco de circunferencia que une los vértices *R* y *S*. ¿Cuál es el área encerrada entre los tres arcos?
2. Hallar e identificar el lugar geométrico del conjunto de los centros de todas las circunferencias que siempre son tangentes a la recta $y - 5 = 0$ y a la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$.

3. Se planea cercar un terreno rectangular con una alambrada de 20 m de largo. Demuestre que si *y* es el área del terreno cuando uno de sus lados es de longitud *x*, entonces $y = 6x - x^2$. ¿Para qué valor de *x* se alcanza el área máxima?, ¿cuál es la forma del terreno de área máxima?

4. Encuentre la ecuación de la elipse con centro en el origen y que pasa por los puntos (1, 3) y (4, 2).

5. Obtenga la ecuación de las asíntotas de las hipérbolas cuyas ecuaciones se dan a continuación:

$$H = \left\{ (x, y) \left| \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1 \right. \right\}$$

$$H = \left\{ (x, y) \left| y = \frac{1}{x} \right. \right\}$$

6. Un arco parabólico de acero, colocado como adorno en un jardín, tiene diez metros de altura y sus puntos de apoyo en el suelo están separados por una distancia de 20*m*. ¿A qué distancia por arriba o por debajo del suelo, se encuentra el foco del arco?

7. La base de un auditorio es de forma elíptica, con 25*m* de longitud y 16*m* de ancho. Una aguja cae justo sobre uno de los focos y produce un ruido que se escucha claramente en el otro foco. ¿Cuál es la distancia que separa a ambos focos?

8. Encuentre la ecuación de la hipérbola con centro en el origen y eje principal sobre el eje *X*, que pasa por los puntos (2, 1) y (4, 3).

CÁLCULO

Problemas resueltos

1. Un campo de atletismo se construye en forma de un rectángulo de lado x con semicírculos de radio r en ambos extremos. El campo estará rodeado de una pista de 400 *m*. Determine el área del campo en función de ***r*.**

2. Sea $F(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$ una función de [-10,10] a los reales. Grafique F y determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas (justifique su respuesta).

   i. Si $x \geq 2$ entonces $F(x) \geq 0$.

   ii. Si $x < -2$ entonces $F'(x) \leq 0$.

   iii. Si $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ entonces $F''(x) \geq 0$

3. Determine el valor que debe tomar $F(x)$ en $x = 0$ para que F sea continua en ese punto, si

$$F(x) = \frac{1-\cos x}{x}$$

4. Determine $\lim\limits_{x\to 2} \frac{3^{x/2}-3}{3^x-9}$

5. Un tanque de agua en forma cónica, de 10 *m* de profundidad y de 3 *m* de radio, se vacía con una rapidez de 4 m^3/min ¿Qué tan rápido baja el nivel de la superficie del agua, cuando se tiene una profundidad de 6 *m?* A la misma profundidad, ¿qué tan rápido se está reduciendo el radio?

6. Encuentre las ecuaciones de las rectas paralelas que son tangentes respectivamente a las curvas:

$$y_1(x) = x^3 + x^2 - 6x + 5 \qquad \text{y} \qquad y_2(x) = \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 - 3x - 3.$$

7. El cable de un puente colgante se amarra a pilares colocados cada 100 *m*. Supongamos que cuelga en forma de parábola y que el punto de suspensión más bajo de la parábola, o sea su vértice, se coloca en el punto (0,0) del plano. Determínese el ángulo entre el cable y el pilar que está en la posición (50, 25) del plano.

8. Considere la función F(t), tal que para una $a \in \mathbf{R}$ satisface que $tF'(t) = F(t) + ta$. Determine F”(1). Además, si F(1) = a, calcule F(3).

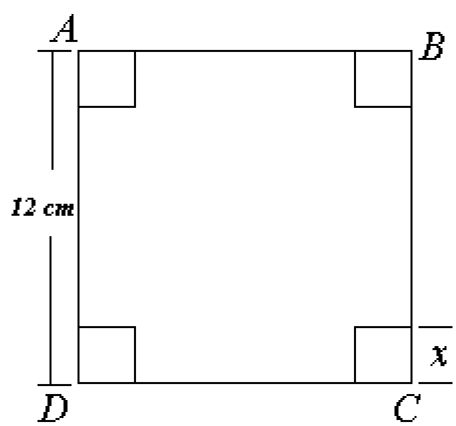
9. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo inscrito en un círculo de radio r que tiene área máxima?

10. Una compañía constructora va a fraccionar un terreno de 2×4 km para construir una unidad habitacional. Dicha unidad debe contener 18 manzanas. Si las calles que se forman en el interior de dicha unidad deben ser pavimentadas y el costo por kilómetro cuadrado de pavimento es de \$12,000.°°. Encuentre las dimensiones de las manzanas de modo que la constructora minimice el costo de pavimentación. Se supone que el ancho reglamentario de las calles es de 3 *m*.

CÁLCULO

Problemas propuestos

1. En cada esquina de un cuadrado de lámina de 12cm por lado, se cortan cuadrados de longitud x. Exprese el volumen de la caja en función de x. (Véase la figura siguiente).



2. En una esfera de radio R_0 está inscrito un cilindro. Escriba el volumen del cilindro en función de la altura a del mismo.

3. Determínese el siguiente límite: $\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x}$.

4. Para cuáles valores de $x \in [0, 2\pi]$ la siguiente función es continua? $F(x) = \sqrt{\ln(\text{sen}(x))}$.

5. En el intervalo $[0, 2\pi]$, determine el ángulo bajo el cual se cortan las siguientes curvas:

   $y(x) = \text{sen}(x)$ y $y(x) = \cos(x)$.

6. En la parábola, $y = x^2$, hállese un punto P cuya distancia hasta la recta $y = 2x - 4$ sea mínima.

CÁLCULO

Problemas de práctica

1. Exprésese el área de un trapecio isósceles, de base $a = 2$ y $b = 1$ en función del ángulo α que forma la base con uno de los lados.

2. Determínese el $\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2 + 7} - \sqrt{x^2 - 7} \right)$.

3. El radio, r, de una esfera varía con velocidad v. ¿A qué velocidad varían la superficie y el volumen?

4. Muéstrese que la curva $y = \frac{x - 1}{x^2 + 1}$ tiene tres puntos de inflexión que están sobre una recta.

5. Demuéstrese que la ecuación $e^{x-1} + x - 2 = 0$ cuenta con una raíz en $x = 1$ y que no tiene más raíces reales.

SOLUCIÓN A LOS PROBLEMAS DE ÁLGEBRA

Problemas resueltos

1. Solución: Sea a el tiempo que recorrió Salvador a 5 km/h y b el tiempo que lo hizo a 8 km/h. Recorrió 72 km, ya que por cada kilómetro obtenía \$500.°° y reunió en total \$36,000.°°. Con la información anterior se plantean las ecuaciones siguientes:

$$5a + 8b = 72$$

$$8a + 5b = 84$$

La solución del sistema anterior es $a = 8$ y $b = 4$. Por lo tanto, Salvador marchó durante 12 horas y recorrió 72 kilómetros.

2. Solución: Sea p el número de pantalones que produce, entonces:

a) El costo, $C(p)$, de producir p pantalones es: $C(p) = 360 + 100p$.

b) El ingreso, $I(p)$, por la venta de p pantalones $I(p) = 160p$.

c) Igualando las expresiones para el ingreso y el costo tenemos que $p = 6$. Es decir, el número de pantalones para que el costo y el ingreso sean iguales es de 6. (A este punto se le conoce como punto de equilibrio).

3. Solución: Sea v_L : la velocidad de Luis en aguas tranquilas y D: la distancia que recorrió en un sentido. Con esta notación el texto del problema se puede escribir de la manera siguiente: R =T * D

A favor de la corriente: $v_L + \frac{1}{2} = \frac{D}{(1/3)}$

En contra de la corriente: $v_L - \frac{1}{2} = \frac{D}{(1/2)}$

La solución de este sistema de ecuaciones es $v_L = 2.5$ y D = 1. Por lo tanto,

a) Luis recorrió 1 km en un sentido.

b) En aguas tranquilas la velocidad de nado de Luis sería de 2.5 km/h.

4. Solución: Al aplicar las leyes de los logaritmos y observando que $1.5 = \frac{3}{2}$, se tiene:

$$\log_x\left(\sqrt[4]{1.5x^3}\right) = \frac{1}{4}\left(\log_x 3 - \log_x 2 + 3\log_x x\right).$$

Sustituyendo los valores dados de los logaritmos se obtiene:

$$\log_x\left(\sqrt[4]{1.5x^3}\right)=\frac{1}{4}\left(A-B+3\right)$$

5. Solución: Sustituyendo $x = 4$ en la expresión dada se obtiene:

$$\left(2(4)\right)^{-2/3}+\left(-8(4)\right)^{-2/5}=(2^3)^{-2/3}+(-2^5)^{-2/5}$$

Después de simplificar esta última expresión se obtiene que el valor de la expresión es: $\frac{1}{2}$.

6. Solución: Se deja el radical en un miembro de la ecuación y luego se eleva al cuadrado ambos lados de la ecuación, con lo que se obtiene:

$$(\sqrt{x-7})^2 = (x - 13)^2.$$

Desarrollando los cuadrados y resolviendo la ecuación, se obtienen las soluciones:

$$x = 16 \text{ y } x = 11.$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación original, el único valor que la satisface es 16. Por lo tanto, la única solución de la ecuación dada es $x = 16$.

7. Solución: Sea a: el ancho del borde uniforme, en centímetros. Una ecuación que representa la información dada es:

$$2(10 + 2a)a + 2(6a) = 80.$$

Cuya solución es $a = 2$. Por lo tanto, el borde decorativo que agregó Celia fue de 2 cm de ancho.

8. Solución: Sea v_I: la velocidad de ida, v_R: la velocidad de regreso, ambas en km/h y sea D la distancia entre las ciudades. Entonces, el tiempo que hicieron de ida t_1 = D / v_I. y el tiempo que emplearon de regreso t_2 = D / v_R.

Por lo que la velocidad promedio, v_P en el viaje redondo está dada por:

$$v_P=\frac{2D}{t_1+t_2}=\frac{2D}{\frac{D}{v_I}+\frac{D}{v_R}}$$

Simplificando la expresión y sustituyendo los valores de las velocidades se tiene que la velocidad promedio en el viaje redondo fue de 120 km/h.

9. Solución: Sustituyendo $g(x)$ en la expresión dada se tiene:

$$\frac{g(x)-g(7)}{x-7}=\frac{(x-2)^2-(7-2)^2}{x-7}=\frac{x-4x-21}{x-7}=\frac{(x-7)(x+3)}{x-7}=x+3.$$

10. Solución: Ya que 84 = $2^2 \cdot 3 \cdot 7$, el número entero positivo más pequeño por el que se debe multiplicar el 84 es 21, para obtener un cuadrado perfecto.

SOLUCIÓN PROBLEMAS DE ÁLGEBRA

Problemas propuestos

1. Solución: $\frac{dn}{n+m}$ días.

2. Solución: La única solución es $x = 48$.

3. Solución: Luis se tardaría 15 horas en entregar él solo las invitaciones.

4. Solución: Ana Laura tiene 47 años y María Teresa 43.

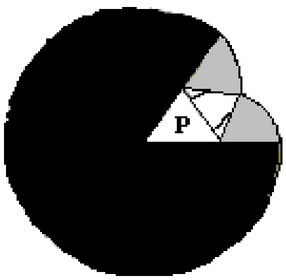
5. Solución: Se debe sumar 33.

SOLUCIÓN A LOS PROBLEMAS DE TRIGONOMETRÍA

Problemas resueltos

1. Solución: Si trazamos el segmento de recta de *b* a *c*, este segmento junto con los segmentos del ángulo $\angle cab$, forman un triángulo equilátero (¿por qué?). Por lo tanto, el ángulo $\angle cab$ mide 60°.

2. Solución: Puesto que la cabra no puede pasar por encima de la plataforma P, al ir caminando alrededor de ella, cubre las áreas que se muestran en la figura anexa. La mayor es igual a 5/6 del área de un círculo de radio 14 *m*. Un triángulo isósceles, con lados iguales a 6*m* y base de 8*m*. Con esta información se puede calcular la altura del triángulo, $2\sqrt{5}\,m$, y cada uno de los ángulos iguales, 48.19°. Ahora bien, cada sector circular, de radio 6*m*, describe un ángulo de (120° - 48.19°) = 71.81°. Así el área de cada uno de esos pequeños sectores circulares es 22.56 m^2. Reuniendo la información anterior, se tiene que el área de pastizal que puede cubrir la cabra es:

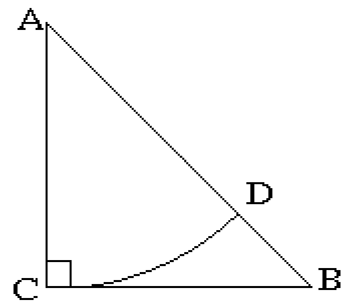


$$\text{Área total } = \frac{5}{6}\pi(14)^2 + \frac{8\cdot 2\sqrt{5}}{2} + 2(22.56) = 576.14m^2.$$

3. Solución: El área del sector circular es $\frac{r^2\theta}{2}$, en donde θ es la medida del ángulo *AOB* en radianes. Por otra parte el área del triángulo isósceles *OAB* es $\frac{r^2\operatorname{sen}(\theta)}{2}$. Por lo tanto, el área de la región pedida es: $\frac{r^2\theta}{2} - \frac{r^2\operatorname{sen}(\theta)}{2} = \frac{r^2}{2}(\theta - \operatorname{sen}(\theta))$.

4. Solución:
   a) 1, ya que la tangente y la cotangente son cofunciones y son iguales para ángulos complementarios.
   b) *sen*(15°) = *sen*(45° - 30°) = *sen*(45°) *cos*(30°) – *cos*(45°) *sen*(30°). Por tanto, *sen*(15°) = $\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\sqrt{3}-1\right)$

5. Solución: Como el triángulo *ABC*, es un triángulo isósceles, entonces $\angle A$ y $\angle B$, cada uno mide 45°. Por lo tanto, el sector circular es un octavo del área del círculo de radio *AC*. Por otro lado, cada cateto mide $2\sqrt{2}$ cm y las áreas de cada una de las dos partes en que el arco divide al triángulo son:



Área del sector circular: π.

Área de la otra parte: 4 - π

Por lo tanto, la razón entre las áreas es: $\frac{p}{4-p}$.

6. Solución: Ya que θ se encuentra en el cuarto cuadrante, sabemos que el *sen* θ debe ser negativo. Construimos un triángulo rectángulo con un cateto, adyacente al ángulo θ, de 5 y la hipotenusa de 13 unidades, por lo que el otro cateto, opuesto al ángulo θ, mide 12 unidades. Por lo tanto, *sen* θ = $-\frac{12}{13}$.

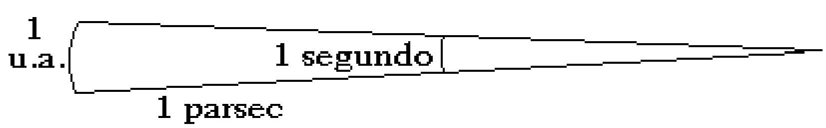
7. Solución: Tomando logaritmo natural en ambos lados de la ecuación se obtiene:

$$cos(\theta) = 0$$

Por lo tanto, los valores que satisfacen la ecuación propuesta son todos los múltiplos enteros impares de $\frac{p}{2}$, es decir,

$$q = \frac{(2k+1)p}{2}, \text{ para toda } k \text{ entera.}$$

8. Solución: Guiándonos por la siguiente figura, y recordando que la longitud, *s*, de un



arco de circunferencia, de radio *r*, que subtiende un ángulo θ, medido en radianes, se obtiene por medio de la fórmula *s* = *r* · θ. Por tanto, despejando *r* de la fórmula anterior y transformando 1” a su equivalente en radianes, se obtienen los resultados siguientes:

a) 1 parsec equivale a 206,264.81 u.a.

b) 1 parsec equivale a 30.86 billones de kilómetros. (Recuerde que la distancia media del Sol a la Tierra es aproximadamente de 149,600,000 km).

9. Solución:
   a) Es fácil ver que forman un ángulo recto a las 3:00 en punto.
   b) A las 11:40, el minutero se encuentra señalando exactamente al 8, mientras que el horario recorrió $\frac{2}{3}$ del arco que va del 11 al 12. El ángulo que subtienden dos números consecutivos en un reloj es 30°. Por lo tanto, el ángulo que forman las manecillas del reloj a las 11:40 es de 110°.

10. Solución: Calculemos el área de cada pedazo de pizza:

El área de la rebanada chica es: $\frac{1}{6}p\left(15\right)^2\ cm^2$.

El área de la rebanada grande: $\frac{1}{8}p\left(25\right)^2\ cm^2$.

Por lo tanto, la rebanada chica da 4.71 cm^2/peso, mientras que la rebanada grande 4.91 cm^2/peso. Así que la rebanada grande da más pizza por cada peso.

SOLUCIÓN PROBLEMAS DE TRIGONOMETRÍA

Problemas propuestos

1. Solución: El número, *n*, de lados del polígono está dado por: $n = \dfrac{360°}{2\,\mathrm{sen}^{-1}(a/r)}$, o bien,

   si mide los ángulos en radianes, $n = \dfrac{p}{\mathrm{sen}^{-1}(a/r)}$

2. Solución: Son 10 los valores de θ que satisfacen la ecuación en (-π, π). Haga un bosquejo de la gráfica de la función *sen* 5θ.

3. Solución: El dependiente les dio aproximadamente 3.2 vueltas. Es decir, 3 vueltas y un arco de 72°.

4. Solución:

   a) Un valor de *k* es $\dfrac{p}{2}$.

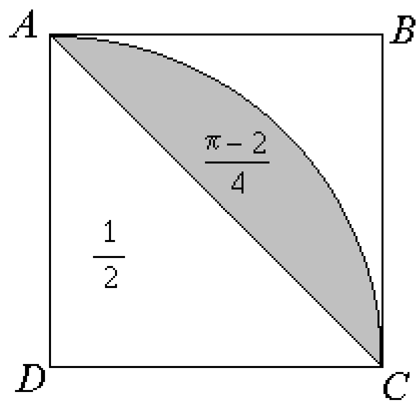
   b) No es único el valor de *k*. Los valores de *k* que satisfacen la expresión son todos los múltiplos enteros impares de $\dfrac{p}{2}$.

5. Solución: El perímetro del hexágono es $80\sqrt{3}$ centímetros.

SOLUCIÓN A LOS PROBLEMAS DE GEOMETRÍA

Problemas resueltos

1. Solución: Como se puede apreciar en la figura, al trazarse un arco con centro en D y uniendo los vértices A y C, el área encerrada es un cuarto del área de una circunferencia con radio unitario, es decir, un área que mide π/4 unidades cuadradas.



Por otro lado, también es fácil ver que si unimos los mismos vértices mediante una recta, entonces el área cubierta por el triángulo ACD mide 1/2. Si restamos $\frac{p}{4}-\frac{1}{2}=\frac{p-2}{4}$ el resultado que obtenemos es precisamente la mitad del área que se pide calcular en este problema, por lo que el área buscada es $2\left(\frac{p-2}{4}\right)=\frac{p}{2}-1.$

2. Solución: Sea *x* la longitud del trozo más corto, entonces la longitud del es forzosamente 1 - *x*. Con cada trozo se forma un triángulo equilátero con perímetros *x* y 1 – *x*, respectivamente. Puede demostrarse (hágalo usted) que el área de un triángulo equilátero cuyos lados son cada uno de longitud *l* está dada por:

$$\acute{a}rea = \frac{\sqrt{3}}{4}l^2$$

con este resultado, y viendo que el triángulo más pequeño está formado por 3 segmentos de longitud (π/3) cada uno, es fácil ver que el área que encierra es de tamaño $\frac{\sqrt{3}}{36}x^2$. Del mismo modo, si el triángulo más grande está formado por tres segmentos de longitud (1-*x)*/3 cada uno, entonces su área es $\frac{\sqrt{3}}{36}(1-x)^2$. El valor de *x* se puede calcular igualando el área correspondiente al triángulo más pequeño a un noveno del área del triángulo más grande.

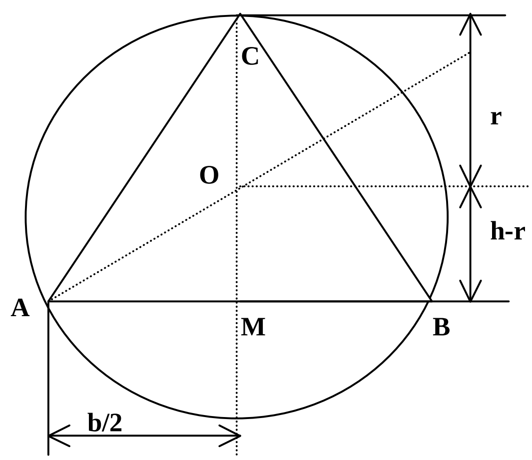
$$\frac{\sqrt{3}}{36}x^2 = \left(\frac{1}{9}\right)\frac{\sqrt{3}}{36}(1-x)^2.$$

Resolviendo esta ecuación se obtiene como resultado:

$$x = 0.25 \textit{ metros},$$

$$1 - x = 0.75 \textit{ metros}.$$

3. Solución : La figura siguiente nos muestra un triángulo equilátero inscrito dentro de una circunferencia. Dentro del triángulo equilátero ABC, se forma un triángulo rectángulo AOM, el cuál tiene como hipotenusa el radio de la circunferencia, cantidad que se puede conocer si se conoce el área del círculo ($r^2 = x/\pi$). Los catetos de este triángulo rectángulo son de magnitud ($b/2$) y (h - r), en donde h y b son la altura y la base del triángulo equilátero, respectivamente.



Entonces es posible, con base en el teorema de Pitágoras, establecer la siguiente igualdad:

$$r^2 = (h - r)^2 + (b/2)^2$$

Es posible demostrar (hágalo usted) que la altura de un triángulo equilátero es proporcional a la magnitud de su base y que está dada por

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}b$$

Entonces para conocer la base del triángulo basta resolver la ecuación:

$$\frac{x}{p}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}b-\sqrt{\frac{p}{x}}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2.$$

De donde se encuentra que $b = \sqrt{\frac{3x}{p}}$ y por lo tanto el área del triángulo es

$$\text{Área} = x\sqrt{\frac{27}{16p^2}}\ .$$

4. Solución: Sean a y b los catetos del triángulo, y sea c su hipotenusa. Entonces se cumple que $a^2 + b^2 = 25^2$. Dado que el perímetro es 12, debe cumplirse que $a + b = 7$. Resolviendo este sistema de ecuaciones se encuentra que $a = 3$ y $b = 4$, por lo que el área del triángulo es: $A = (3)(4)/2 = 6$ unidades cuadradas.

5. Solución: El área de un cuadrado inscrito dentro de una circunferencia que a su vez está inscrita dentro de un cuadrado de área x, es exactamente $0.5x$.
También es fácil deducir que el área de una circunferencia inscrita dentro de un cuadrado de área s^2 es $a = \pi(0.5s)^2$.
Con base en lo anterior podemos deducir que si el área del cuadrado más grande es de tamaño x, entonces el área del cuadrado más pequeño mide $\frac{x}{2^4}$ unidades cuadradas, de donde el círculo inscrito en éste cubre un área $a = p\,\frac{x}{2^6} = p\,\frac{x}{64}$.

6. Solución: Recordado que dados dos puntos en el plano, (X_0, Y_0) y (X_1, Y_1), el punto medio entre ambos es el punto

$$\left(\frac{X_0+X_1}{2},\frac{Y_0+Y_1}{2}\right)$$

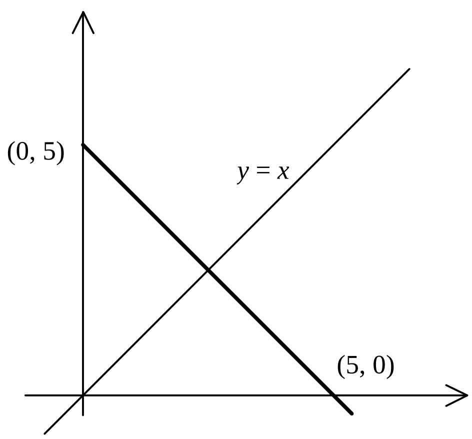
Sean entonces $\{(X_i,Y_i)\}_{i=3}^{3}$ los vértices del triángulo, por lo que dados los puntos medios entre éstos se puede plantear los dos siguientes sistemas de ecuaciones simultáneas, uno para las X_i y otro para la Y_i.

$$\frac{X_1 + X_2}{2} = 2 \qquad \frac{Y_1 + Y_2}{2} = 5$$
$$\frac{X_1 + X_3}{2} = 1 \qquad \frac{X_1 + X_3}{2} = 1$$
$$\frac{X_3 + X_2}{2} = 4 \qquad \frac{Y_3 + Y_2}{2} = 2$$

Al resolver el sistema se encuentra que los vértices del triángulo son los puntos de coordenadas:

(-1, 4), (5, 6) y (3, -2).

7. Solución: La siguiente gráfica nos muestra cómo el conjunto de puntos equidistantes a los puntos fijos (0, 5) y (5, 0) es la mediatriz del segmento que los une (que además pasa por el origen).



Entonces, la respuesta es $y = x$

8. Solución: Los puntos (2/3, 1) y (10/3, -1) son los puntos de trisección del segmento AB. Entonces, la distancia entre el punto $A = (x_A, y_A)$ y el punto (2/3, 1) debe ser la misma que la distancia entre los puntos (2/3, 1) y (10/3, -1). También podemos asegurar que la distancia entre el punto $B = (x_B, y_B)$ y el punto (10/3, -1) debe ser la misma que la distancia entre los puntos (2/3, 1) y (10/3, -1). Lo anterior nos lleva a las siguientes ecuaciones:

$$\frac{x_A + \frac{10}{3}}{2} = \frac{2}{3} \qquad \frac{x_B + \frac{2}{3}}{2} = \frac{10}{3}$$

$$\frac{y_A - 1}{2} = 1 \qquad \frac{y_B + 1}{2} = -1$$

De las cuales obtenemos las coordenadas de A = (-2, 3) y B = (6, -3).

9. Solución: Si el segmento que une al origen y al punto (0, 1) es la hipotenusa del triángulo, y el punto (X, Y) el vértice formado por el cruce de los dos catetos, entonces por el teorema de Pitágoras, debe cumplirse que

$$(X^2 + Y^2) + (X - 1)^2 + Y^2 = 1$$

Al reducirlo algebraicamente, se encuentra que

$$X^2 + Y^2 - X = 0$$

SOLUCIÓN PROBLEMAS DE GEOMETRÍA

Problemas Propuestos

1. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}=1$.

2. $\frac{x}{2}$.

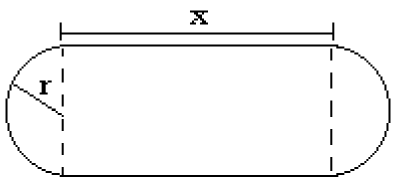
3. La recta puede tener pendiente $-\frac{7}{12}$, o bien, $-\frac{7}{3}$.

4. $\frac{1}{5}$.

SOLUCIÓN A LOS PROBLEMAS DE CÁLCULO

Problemas resueltos

1. Solución: Sea x la longitud del rectángulo y $2r$ el diámetro de cada semicírculo que a su vez también es el ancho del rectángulo, véase la figura siguiente. El área A del campo



deportivo está dada por la suma del área de un círculo más el área del rectángulo o sea $A = 2rx + \pi r^2$.

Por otro lado, el perímetro del campo deportivo es de 400 m, lo que debe ser igual a la suma de dos lados del rectángulo y el perímetro del circulo, es decir,

$$400 = 2x + 2\pi r.$$

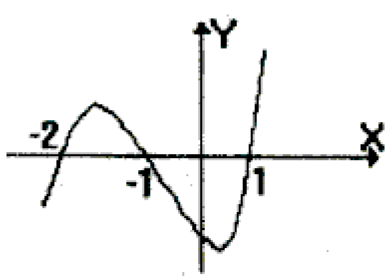
Despejando de esta expresión la x, obtenemos que

$$x = 200 - \pi r.$$

Substituyendo en la primera expresión y simplificando obtenemos al área en función de r,

$$A(r) = 400r - \pi r^2.$$

2. Solución; Observemos que F tienen como raíces a $x = -2$, $x = -1$ y $x = 1$ y que tiende a $-\infty$ cuando x tiende $-\infty$ y que cuando x tiende a ∞, F(x) tiende a ∞, así que su gráfica es de la forma que aparece en la figura siguiente.



Analizando la gráfica podemos concluir que $F(x) > 0$ cuando $x \geq 2$ por lo que la primera afirmación es verdadera.

Si $x < -2$ entonces $F'(x) > 0$, por lo que el inciso (ii) es falso.

Y por último el inciso (iii) es verdadero porque si $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ entonces F” > 0, ya que para ese intervalo la gráfica es convexa o cóncava hacia arriba. Otra forma de probarlo es calculando F”(x) = 6x + 4 y evaluarla en este intervalo.

3. Solución: Dado que el numerador y el denominador tienden a cero cuando x tiende a cero podemos aplicar la regla de L' Hopital que nos dice:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

De modo que,

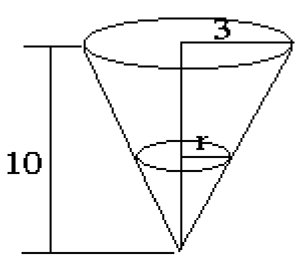
$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{1} = 0$$

Por lo tanto, F(0) = 0 hace que la función F sea continua en cero.

4. Solución: Observemos que $3^x - 9 = (3^{x/2} – 3)(3^{x/2} + 3)$ entonces

$$\lim_{x \to 2} \frac{3^{x/2} - 3}{3^x - 9} = \lim_{x \to 2} \frac{1}{3^{x/2} + 3} = \frac{1}{6} .$$

5. Solución: En la figura siguiente se muestra la forma del tanque. El volumen de un cono es V = $\frac{pr^2h}{3}$ Por semejanza de triángulos, el radio se puede expresar en función de la altura: $r = \frac{3}{10}h$. Por lo que substituyendo en el volumen, nos queda éste únicamente en función de la altura h. Calculando dV/dt se obtiene:



$$\frac{dV(h)}{dt} = \frac{9p}{100} h^2 \frac{dh}{dt},$$

despejando $\frac{dh}{dt}$ y evaluando para h = 6 se obtiene:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{100}{81p} \ m/mín.$$

Para calcular dr/dt se utiliza $\frac{dr}{dt} = \frac{3}{10}\frac{dh}{dt}$ y obtenemos que:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{10}{27p} m/min .$$

6. Solución: Dos rectas son paralelas si sus pendientes son iguales. Hay que determinar aquellos puntos x para los cuales la pendiente de la tangente a la curva y_1 y la pendiente de la tangente a la curva y_2 son iguales. Para ellos igualamos $y_1' = y_2'$. Esto es:

$$y_1'(x) = 3x^2 + 2x - 6$$

y

$$y_2'(x) = 2x^2 + 4x - 3.$$

Igualando ambas expresiones se obtiene $x^2 - 2x - 3 = 0$, lo que implica que en $x = -1$ y en x = 3 las pendientes de las tangentes a las curvas son iguales. En el caso x=3 la ecuación de las rectas tangentes a y_1 y y_2 son $27x - y + 56 = 0$ y $27x - y - 57 = 0$, respectivamente. Por otro lado si $x = -1$ las ecuaciones son $5x + y + 6 = 0$ y $5x + y + 1/3 = 0$, respectivamente.

7. Solución: La ecuación general de una parábola es $y(x) = ax^2 + bx + c$. En este caso los puntos (0, 0) y (50, 25) están sobre la parábola, por lo que satisfacen la ecuación. Por otro lado, la parábola alcanza su mínimo en (0,0) por lo que $y' = 2ax + b$ satisface que $y'(0) = 0$. Estas tres ecuaciones nos permiten determinar las constantes a, b y c. Al resolver el sistema de ecuaciones lineales obtenemos que $a = 1/100$, y $b = c = 0$. Por lo que la curva que describe al puente es $y(x) = x^2/100$. Evaluando su derivada en el punto (50, 25), se obtiene que la pendiente de la tangente a la curva $y(x)$ en este punto es igual a 1. Por lo que el ángulo que se forma entre la tangente y una recta paralela al eje de las X es de 45 grados. Así que el ángulo que se forma entre la tangente a la curva y el pilar es también de 45 grados.

8. Solución: F” se obtiene derivando ambos lados de la igualdad: $tF'(t) = F(t) + ta$.

Entonces

$$F''(t) = a/t. \qquad (1)$$

Al evaluar en $t = 1$ se obtiene que $F''(1) = a$.

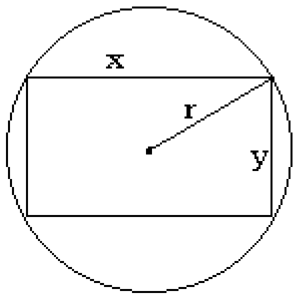
Para calcular F(3) se integra la expresión (1), obteniéndose $F'(t) = a\ ln(t) + c$, y substituyendo el valor de $F'(t)$, se obtiene:

$F(t) + ta = t(a\ ln\ t + c)$, lo cual implica que $F(t) = at\ ln\ t + (c - a)t$. Evaluando en $t = 1$, se obtiene que $c = 2a$.

Entonces substituyendo el valor de c y evaluando en $t = 3$ se concluye que:

$$F(3) = 3a\ ln\ 3 + 3a.$$

9. Solución: Analicemos la figura siguiente. Denotemos como x al largo del rectángulo y como y al ancho. Por el teorema de Pitágoras x, y y r, el radio, se relacionan por la siguiente expresión:



$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = r^2.$$

Despejando x podemos escribir al área en función únicamente de y,

$$A(y) = y\sqrt{4r^2 - y^2}.$$

Para obtener el valor máximo, derivemos $A(y)$ y determinemos para cuál o cuáles valores de y se cumple $A'(y) = 0$.

$$A'(y) = \sqrt{4r^2 - y^2} - \frac{y^2}{\sqrt{4r^2 - y^2}}.$$

Al resolver en términos de y se obtiene: $2r^2 - y^2 = 0$, lo que implica que $y = \sqrt{2}r$. Este es un máximo ya que al evaluar la segunda derivada se obtienen un valor negativo. Al sustituir el valor de y en la primera expresión obtenemos que $x = y = \sqrt{2}r$, o sea que dado un circulo de radio r, el rectángulo que maximiza el área es un cuadrado de lado $\sqrt{2}r$ unidades.

10. Solución: Supongamos que la forma de fraccionar el terreno será mediante m filas y n columnas de manzanas. Por lo tanto $m \times n = 18$. Supongamos que las dimensiones de cada manzana son l_1 en la dirección horizontal y l_2 en la dirección vertical. Entonces

$$nl_1 + \frac{3(n-1)}{1000} = 2 \qquad \text{y} \qquad ml_2 + \frac{3(m-1)}{1000} = 4.$$

Por otro lado, la superficie total a pavimentar con este esquema es:

$$Pav(m, n) = 3(4m + 2n - 6)/1000.$$

Por lo que el costo de pavimentación es:

$$Costo(m, n) = 36(4m + 2n - 6).$$

Es posible expresar el costo anterior en términos de una sola variable, por ejemplo, en términos de m quedaría:

$$Costo(m) = 36(4m + 36/m - 6).$$

Busquemos ahora el mínimo de esta función para $m \in \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$. De aquí obtenemos que m debe ser 3 y por lo tanto n debe ser 6. Finalmente $l_1 = 664.166$ metros y $l_2 = 664.666$ metros

SOLUCIÓN PROBLEMAS DE CÁLCULO

Problemas propuestos

1. Solución: $V(x)=x(12-2x)^2$.

2. Solución: $Vol(a) = \pi(R_0^2 - a^2)a$.

3. Solución: $\ln a$.

4. Solución: $(0, \pi)$

6. Solución: $Arctang(2\sqrt{2})$.